Potencia y energía electromagnética.

Importancia.

Existen muchos dispositivos de interés práctico para los ingenieros electrónicos y eléctricos que se basan en la transmisión o conversión de energía electromagnética. Entonces es necesario entender las propiedades de almacenamiento y transmisión de energía electromagnética.

También desde el punto de vista de la energía, se puede utilizar la potencia para determinar otras propiedades de sistemas eléctricos. Por ejemplo, la energía electromagnética da una relación directa entre los parámetros concentrados R, L, C, y los campos dentro de los dispositivos, que conducen a estos elementos básicos – muy importante es la relación entre la energía electromagnética y la teoría de circuitos, especialmente cuando no se puede identificar las resistencias, inductores o capacitores.

La conservación de energía.

La creación de un campo electromagnética requiere la reducción de otro tipo de energía y esta energía está disponible cuando se destruyen los campos. Así la potencia suplida por cualquier sistema (como por ejemplo el campo electromagnético) debe mostrarse o como un decrecimiento en la energía neta del sistema o como el flujo de potencia llevada por el sistema lejos de sus fuentes. Entonces la energía suplida por los campos debe expresarse en términos del flujo de potencia dentro de los campos, o sea, en términos de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ solamente.

El teorema de Poynting en formas diferencial e integral.

La energía puede ser transportada a través del espacio por los campos electromagnéticos. Además la energía puede ser almacenada en los campos electromagnéticos. En la teoría de circuitos, el flujo de potencia está relacionada con el producto de voltaje y corriente VI. Para los campos electromagnéticos el flujo de potencia a través de un elemento de área $d\boldsymbol{a}$ está dado por

$$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\cdot d\,\boldsymbol{a} \qquad \boldsymbol{E}\equiv\text{voltaje} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{H}\equiv\text{corriente} \tag{1}$$

Veamos:

Considere un volumen V encerrado por una superficie cerrada S. Dentro de de S existe un medio lineal, isotrópico, homogéneo (lih), y caracterizado por μ, ε y σ. Considere la expresión $\nabla\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$. Esta expresión puede expandirse para obtener

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H} \tag{2}$$

Se reemplazan $\nabla\times\boldsymbol{E}$ y $\nabla\times\boldsymbol{H}$ por

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad 3$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J} \qquad 4$$

Se tiene entonces:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = -\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} - \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} \qquad 5$$

Y como $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$ 6

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = -\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} - \sigma \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E} \qquad 7$$

Ahora $\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \mu \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}) = \frac{\mu}{2} \frac{\partial \boldsymbol{H}^2}{\partial t}$ 8

$$\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial \boldsymbol{E}^2}{\partial t} \qquad 9$$

$$\rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu}{2} H^2 + \frac{\epsilon}{2} E^2 \right) - \sigma E^2 \qquad 10$$

La ecuación (10) es el teorema de Poynting en forma diferencial. Se interpretan $\frac{\mu}{2} H^2$ y $\frac{\epsilon}{2} E^2$ como la densidad de energía almacenada en los campos magnético y eléctrico respectivamente. El término σE^2 se interpreta como la potencia disipada por unidad de volumen debido al efecto de Joule por el flujo de corriente de conducción de densidad σ***E***.

De esta manera, la divergencia de potencia (o la tasa de flujo de energía) de una unidad elemental de volumen es la suma de la tasa de decrecimiento de la energía almacenada en los campos ***H*** y ***E*** por unidad de volumen menos la potencia disipada por unidad de volumen.

Una forma macroscópica de (10) se obtiene al integrar sobre el volumen y convertir la integral de volumen de la divergencia en una integral de superficie cerrada por medio del teorema de la divergencia.

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \, dV = -\iiint_V \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{2} H^2 + \frac{\epsilon}{2} E^2 \right) dV - \iiint_V \sigma E^2 \, dV \qquad 11$$

Por el teorema de la divergencia, $\iiint\limits_V \nabla \cdot \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}\, dV = \oiint\limits_S \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \cdot d\,\boldsymbol{a}$ y la ecuación (11) se convierte en

$$\oiint\limits_S \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \cdot d\,\boldsymbol{a} = -\frac{d}{dt} \iiint\limits_V \left(\frac{\mu}{2} H^2 + \frac{\epsilon}{2} E^2 \right) dV - \iiint\limits_V \sigma\, E^2\, dV \qquad 12$$

La ecuación (12) es el teorema de Poynting en forma integral. Indica que el flujo de potencia instantáneo a través de una superficie cerrada S es igual a la tasa de decrecimiento de la energía almacenada en los campos $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{E}$ menos la potencia disipada dentro del volumen V debido al efecto de Joule. El vector $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ es el vector de Poynting $\mathcal{P}$ o $\boldsymbol{S}$ y da el flujo instantáneo de potencia en magnitud y dirección por unidad de área.

$$\oiint\limits_S \mathcal{P} \cdot d\,\boldsymbol{a} = -\frac{d}{dt} \iiint\limits_V \left(\frac{\mu}{2} H^2 + \frac{\epsilon}{2} E^2 \right) dV - \iiint\limits_V \sigma\, E^2\, dV \qquad 13$$

Según la ecuación (13) el flujo total de potencia a través de una superficie dada se obtiene al integrar la componente normal de $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ sobre la superficie en cuestión. La energía fluye en una dirección normal a $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$. Aunque se puede interpretar $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ como la densidad de potencia en un punto, $\oiint\limits_S \mathcal{P} \cdot d\,\boldsymbol{a}$ significa que la integral de superficie total de $\mathcal{P}$ da como resultado el flujo neto de potencia a través de una superficie cerrada.

Teorema de Poynting estático.

Cuando los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ son invariantes en el tiempo, $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$. En forma diferencial se tiene

$$\nabla \cdot \mathcal{P} = -\sigma\, E^2 \qquad 14$$

y en forma integral,

$$\oiint\limits_S \mathcal{P} \cdot d\,\boldsymbol{a} = -\iiint\limits_V \sigma\, E^2\, dV \qquad 15$$

Todas las expresiones que representan el flujo de potencia en los procesos de polarización eléctrica y magnética y la energía almacenada en los campos ya no aparecen cuando $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. La potencia estática (o en *dc*) fluye en un sistema independiente del tiempo sólo cuando la densidad de corriente libre $\boldsymbol{J}$ aparece en un punto junto con un campo $\boldsymbol{E}$ estático. $\boldsymbol{J}$ típicamente es en forma de una corriente de conducción de densidad $\sigma\boldsymbol{E}$ en un conductor o la densidad de corriente de la fuente en una fuente eléctrica. $\boldsymbol{J}$ puede tomar la forma de cualquier flujo de carga, por ejemplo, la corriente de convección electrónica en un tubo de vacío.

Energía en los materiales *lih*.

Empezando con la ley de fuerza de Lorentz,

$$F_e = q(E + v_e \times \mu_0 H) \qquad 16$$

se recuerda que esta expresión sirve para las definiciones básicas de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ en términos de la fuerza que actúa sobre una carga eléctrica puntual en movimiento. Entonces, $\boldsymbol{F_e}$ es ejercida sobre q tanto por $\boldsymbol{E}$ como por $\boldsymbol{H}$. Esto implica que se necesita una fuerza adicional $\boldsymbol{F_m}$ ejercida sobre una carga magnética q^* en movimiento. Por analogía,

$$F_m = q^*(H - v_m \times \epsilon_0 E) \qquad 17$$

Como indicada arriba, $\boldsymbol{F_m}$ actúa sobre q^* tanto por $\boldsymbol{E}$ como por $\boldsymbol{H}$.
Si existe una distribución de carga eléctrica de densidad ρ en movimiento con una velocidad $\boldsymbol{v_e}$, la densidad de fuerza que actúa sobre un volumen unitario de carga eléctrica distribuida está dada por

$$f_e = \rho(E + v_e \times \mu_0 H) \qquad \text{Nm}^{-3} \qquad 18$$

$$f_e = \rho E + J \times \mu_0 H \qquad 19$$

Aquí,

$$J = \rho v_e \qquad 20$$

$\boldsymbol{J}$ es la densidad de corriente eléctrica debido al movimiento de ρ.
Por analogía,

$$f_m = \rho^*(H - v_m \times \epsilon_0 E) \qquad \text{Nm}^{-3} \qquad 21$$

$$f_m = \rho^* H - J^* \times \epsilon_0 E \qquad 22$$

En este caso,

$$J^* = \rho^* v_m \qquad 23$$

$\boldsymbol{J}^*$ es la densidad de corriente eléctrica debido al movimiento de ρ*.
La cantidad de potencia suplida a una carga eléctrica q que se mueve con velocidad $\boldsymbol{v_e}$ por el campo electromagnético que ejerce una fuerza $\boldsymbol{F_e}$ sobre q es:

$$P_e = F_e \cdot v_e = q(E + v_e \times \mu_0 H) \cdot v_e \qquad \text{W} \qquad 24$$

$$\rightarrow P_e = q\, v_e \cdot E \qquad 25$$

En la ecuación (24),

$$\boldsymbol{v_e} \perp (\boldsymbol{v_e} \times \mu_0 \boldsymbol{H}) \qquad 26$$

$$\boldsymbol{v_e} \cdot (\boldsymbol{v_e} \times \mu_0 \boldsymbol{H}) \equiv (\boldsymbol{v_e} \times \boldsymbol{v_e}) \cdot \mu_0 \boldsymbol{H} = 0 \qquad 27$$

Por analogía,

$$P_m = \boldsymbol{F_m} \cdot \boldsymbol{v_m} = q^* (\boldsymbol{H} - \boldsymbol{v_m} \times \epsilon_0 \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{v_m} \quad \text{W} \qquad 28$$

$$\rightarrow P_m = q^* \boldsymbol{v_m} \cdot \boldsymbol{H} \qquad 29$$

$$\boldsymbol{v_m} \cdot (\boldsymbol{v_m} \times \epsilon_0 \boldsymbol{E}) \equiv (\boldsymbol{v_m} \times \boldsymbol{v_m}) \cdot \epsilon_0 \boldsymbol{E} = 0 \qquad 30$$

La carga eléctrica recibe energía solamente del campo eléctrico y la carga magnética recibe energía solamente del campo magnético.
Conclusión: La densidad de potencia entregada por el campo electromagnético a cargas eléctricas y cargas magnéticas en movimiento dentro de un volumen unitario del espacio está dada por $\boldsymbol{f_e} \cdot \boldsymbol{v_e} + \boldsymbol{f_m} \cdot \boldsymbol{v_m}$ que es igual a la densidad de potencia neta suplida a las cargas eléctricas y magnéticas en movimiento.

$$p = p_e + p_m = (\boldsymbol{f_e} \cdot \boldsymbol{v_e} + \boldsymbol{f_m} \cdot \boldsymbol{v_m}) = \rho \boldsymbol{v_e} + \rho^*_m \boldsymbol{v_m} \quad \text{Wm}^{-3} \qquad 31$$

Aquí $\boldsymbol{f_e}$ actúa sobre ρ y $\boldsymbol{f_m}$ actúa sobre ρ*.
Así, la potencia neta suplida *por* el campo electromagnético *a* distribuciones de carga eléctrica y carga magnética en movimiento en el espacio libre es, en cada punto:

$$p = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}^* \cdot \boldsymbol{H} \quad \text{Wm}^{-3} \qquad 32$$

Esta expresión es para cualquier distribución de ***J*** y ***J**** en el espacio libre. Ahora ¿qué pasa en los materiales? Eso veremos ahora.
Se sabe que ***J**** resulta en un material magnético fijo ($\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$) cuando hay una variación temporal de la magnetización ***M***,

$$\boldsymbol{J}^* = \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} \qquad 33$$

Entonces para un material magnético,

$$p_m = \boldsymbol{J}^* \cdot \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H} \cdot \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} \quad \text{Wm}^{-3} \qquad 34$$

p_m es la densidad de potencia suplida por el campo electromagnético al material cuando su magnetización cambia con el tiempo.

La densidad de corriente eléctrica puede consistir de una componente de polarización $\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$ y una componente libre $\boldsymbol{J}_f$.

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_f+\boldsymbol{J}_p \rightarrow \boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_f+\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \qquad 35$$

La componente debido a la polarización conduce a una componente de densidad de potencia p_p, con

$$p_p=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_p=\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \qquad 36$$

En la ecuación (36), p_P representa la densidad de potencia suplida por el campo electromagnético macroscópico al material cuando su polarización cambia con el tiempo.
La densidad de potencia debido a la corriente libre puede asociarse con diferentes fenómenos físicos dependiendo del carácter de la fuerza externa que mantiene las cargas en equilibrio dinámico. Entonces se puede tener corriente libre debido a conducción en el material y en este caso la fuerza ejercida por el campo eléctrico se balancea por fuerzas de fricción que depende del movimiento de las cargas, resultando en disipación de calor y calentamiento Ohmico de Joule en resistencias, con $\boldsymbol{J}_f = \sigma\boldsymbol{E}$. En este caso la densidad de esta potencia disipada es:

$$p_d=\boldsymbol{J}_f\cdot\boldsymbol{E}=\sigma\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}=\sigma|\boldsymbol{E}|^2 \qquad \mathrm{Wm}^{-3} \qquad 37$$

Pero $\boldsymbol{J}_f$ puede representar otras formas de densidad de corriente libre, por ejemplo, la densidad de fuente de corriente $\boldsymbol{J}_s$ que fluye en una fuente de voltaje o corriente. En este caso $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_s$ representa la potencia suplida por el campo a la fuente (si es positivo) o la potencia suplida por la fuente al campo (si es negativo).

$$\rightarrow p_s=-\boldsymbol{J}_s\cdot\boldsymbol{E} \qquad 38$$

y en forma general,

$$p_s=\boldsymbol{J}_f\cdot\boldsymbol{E} \qquad 39$$

Al combinar las varias formas de densidad de potencia suplida a la materia, se tiene:

$$p=p_s+p_d+p_p+p_m=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_s+\sigma|\boldsymbol{E}|^2+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}+\boldsymbol{H}\cdot\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} \qquad 40$$

La potencia suplida por unidad de volumen a cargas eléctricas y magnéticas en movimiento que forma el modelo de la materia en un punto dado, puede absorberse en varias formas:
-Convertida a otra forma de energía en la fuente - ($-p_s$)
-Disipada en un conductor – (p_d)
-Incrementar el nivel de polarización en dieléctricos – (p_p)

-Incrementar el nivel de magnetización en materiales magnéticos – (p_m)
Algunos, todos o ninguno de estos procesos puede ocurrir en un punto dado, dependiendo de la naturaleza de los campos ***E***, ***H*** y el tipo de material presente en el punto en cuestión.

Teorema de Poynting en la materia.
Antes encontramos

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu}{2}H^2+\frac{\epsilon}{2}E^2\right)-\sigma E^2 \qquad 10$$

Ahora al incluir los efectos mencionados anteriormente, se puede ubicar el término $-p_s$ a la izquierda y p_d, p_p, p_m a la derecha:

$$-\nabla\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_s=\sigma E^2+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}+\boldsymbol{H}\cdot\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon_0}{2}E^2+\frac{\mu_0}{2}H^2\right) \qquad 41$$

o

$$-\nabla\cdot\mathcal{P}+p_s=p_d+p_p+p_m+\frac{\partial}{\partial t}(w_e+w_m) \qquad 42$$

$-\nabla\cdot\mathcal{P}+p_s$ es la potencia neta suplida por unidad de volumen.

$p_d+p_p+p_m$ es la potencia absorbida por la materia por unidad de volumen.

$\frac{\partial}{\partial t}(w_e+w_m)$ es la potencia absorbida por los campos ***E*** y ***H*** por unidad de volumen.

En forma integral, se tiene:

$$-\oiint_S \mathcal{P}\cdot d\boldsymbol{a}-\iiint_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_s dV=\iiint_V\left(\sigma E^2+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}+\boldsymbol{H}\cdot\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial t}\right)dV$$
$$+\frac{d}{dt}\iiint_V\left(\frac{\epsilon_0}{2}E^2+\frac{\mu_0}{2}H^2\right)dV \qquad 43$$

$-\oiint_S \mathcal{P}\cdot d\boldsymbol{a}-\iiint_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_s dV$ es la potencia total suplida a V.

$\iiint_V\left(\sigma E^2+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}+\boldsymbol{H}\cdot\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial t}\right)dV$ es la potencia absorbida por el material en V.

$\frac{d}{dt}\iiint_V\left(\frac{\epsilon_0}{2}E^2+\frac{\mu_0}{2}H^2\right)dV$ es la potencia absorbida por los campos ***E*** y ***H*** en V.